数理解析研究所講究録
584巻 1986年 43-45

Forcing and consistency proof in General topology

琉大教育　家本　宣幸　(Nobuyuki Kemoto)

M, N は ZFC のモデルで、$M \subset N$ を満たしているとする。M で X をベース $\mathcal{B}$ を持つ位相空間とすると、あきらかに、N で $\mathcal{B}$ は X のベースとなる。このことから N で X を位相空間と考えることができる。簡単な計算で M で X が T_0 (T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$) ならば、N で X は T_0 (それぞれ T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$) がわかる。更に M で X が距離空間であれば、N で X は距離空間になることもわかる。又、M で X を正則な位相空間とし、X のベースの最小濃度を κ とし、$\mathbb{P}$ を κ を可算順序数につぶす半順序集合、たとえば $Fn(\kappa, \omega, \omega)$、とする。$G$ を $\mathbb{P}$-generic over M なるフィルターとすると、$M[G]$ で X は可算ベースを持つ正則位相空間となり、X は距離空間となる。このことは、あるモデルで正則な位相空間はモデルを拡張することにより距離空間にすることができるということ主張している。特に、正規でない正則空間はモデルを拡張することにより、

正規にできる。逆に、M, N が ZFC のモデルで $M \subset N$ を満たしている時、M で正規な空間 X は N で X は正規になるかということが次の問題になってくる。これは一般には否定的である。M を MA (Martin's axiom) と CH (Continuum Hypothesis) の否定を満たすモデルとし、M で B を濃度 $\aleph_1$ の実数の部分集合とする。$X = B \times \{0\} \cup \{(x, y) \in R^2 : y > 0\}$ とし $y > 0$ なる (x, y) の近傍は普通の Euclid の意味の近傍で、$(x, 0)$ の近傍は、$(x, 0)$ で接する円板の中身と $\{(x, 0)\}$ の和集合で与える。$\mathbb{P} = Fn(\omega_1, 2, \omega_1)$ とすると $M[G]$ で X は正規でないことがわかる。一方、M で X は正規である。ここで G は $\mathbb{P}$-generic over M なフィルターである。この例は、$MA + \neg CH$ を満たすモデルで構成される距離化不可能な、separable Moore 空間である。同様な方法で $\beta\omega$ の正規な部分空間 X で、$Fn(\omega_1, 2, \omega_1)$ で拡張したモデルでは正規でない real な例を作ることができるが、Moore (第一可算) ではない。ここで、real な例とは、集合論の付加的な axiom たとえば、MA, CH などを仮定せずに構成できる例のことである。この周辺の問題として次をあげておく。

<u>問題 1</u> real な正規 Moore (第一可算) 空間で広いモデルで正規とはならない例があるか。

<u>問題2</u>　MでXを正規空間とする時，半順序集合$\mathbb{P}$がどのような条件を満たしていれば，$M[G]$でXは正規となるか。